Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 825516 14 luglio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	b
3	b
4	d
5	c
6	c
7	a
8	a
9	d
10	b
11	c
12	d

1. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = -5|x|(2 - \cos x)$ nel punto di ascissa $x = -\pi$ è

(a) $y = 15x - 15\pi$ ► (b) $y = 15x$ (c) $y = (15 - 5\pi)x - 5\pi^2$ (d) $y = 15x + 15\pi$

Soluzione:

$f(x) = -5|x|(2 - \cos x) \quad , \quad x_0 = -\pi.$

Dato che $x_0 < 0$, la funzione, in un intorno di x_0, si scrive

$$f(x) = 5x(2 - \cos x).$$

$$f'(x) = 5(2 - \cos x + x \sin x)$$

$$f(-\pi) = -5\pi(2 - (-1)) = -15\pi$$

$$f'(-\pi) = 5(2 - (-1) - \pi \cdot 0) = 15$$

L'equazione della retta tangente è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -15\pi + 15(x - (-\pi)) = -15\pi + 15x + 15\pi = 15x.$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

(a) f è crescente in $\mathbb{R}$

► (b) $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$

(c) f è limitata in $\mathbb{R}$

(d) f è dispari

Soluzione:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \min(f) = 0.$$

3. Se $F(x) = \displaystyle\int_1^{x\cos(2x)} \frac{(\sin t)^2 \cos t}{2 + (\sin t)^3}\, dt$ allora $F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) =$

(a) $-\dfrac{(\sin 1)^2 \cos 1}{2 + (\sin 1)^3}$

► (b) 0

(c) $+\infty$

(d) $\log 3$

Soluzione:

$$F(x) = \int_{1}^{x\cos(2x)} \frac{(\sin t)^2 \cos t}{2+(\sin t)^3}\, dt .$$

$$F'(x) = \frac{\left(\sin(x\cos(2x))\right)^2 \cos(x\cos(2x))}{2+\left(\sin(x\cos(2x))\right)^3} \cdot \left(\cos(2x) - 2x\sin(2x)\right)$$

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(\pi)\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi\right)}{2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi\right)\right)^3} \left(\cos(\pi) - 2\frac{\pi}{2}\sin\pi\right) =$$

$$= \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2+\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^3} \left(-1-0\right) = \frac{1\cdot 0}{2-1} \left(-1-0\right) = 0 .$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{x^2-4}\,dx =$

(a) $\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$ (b) $\log 3 - \log 2$ (c) $\log\frac{9}{4} - \log\frac{1}{12}$ ► (d) $\frac{1}{4}\log 3 - \log 2$

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{1+x}{x^2-4}\,dx$$

$$\frac{1+x}{x^2-4} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2-4} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2-4} + \frac{1}{x^2-4}$$

$$\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \log|x^2-4| + c$$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1+x}{x^2-4}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log|x^2-4| + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{4}\log\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log 4 - \cancel{\frac{1}{4}\log 1} = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{4}\log 3 - \frac{1}{2}\,2\log 2 =$$

$$= \frac{1}{4}\log 3 - \log 2 .$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$

(a) non esiste (b) diverge positivamente ► (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$. Poniamo $f(x) = \dfrac{\log x}{1-x^2}$ e osserviamo che

f non è definita per $x=0$ e $x=1$. Dividiamo l'intervallo di integrazione considerando prima $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$. Osserviamo che $f(x) > 0$ $\forall x \in (0,1)$.

Vediamo l'andamento di f per $x \to 0$. Scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1-x^2} \cdot x^{1/2} = 1 \cdot \lim_{x\to 0^+} x^{1/2} \log x = 0 .$$

Dato che $\displaystyle\int_0^{1/2} g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto, anche $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ converge.

Per $x \to 1$ $\quad f(x) = \dfrac{\log(1+x-1)}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)+o(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1+o(x-1)}{x+1} \to \dfrac{1}{2}$

quindi f è limitata in un intorno di $x=1$, di conseguenza $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(x)\,dx$ converge.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\cos\sqrt{x})\left(\sin\frac{1}{x^3}\right)\,dx$

(a) diverge negativamente (b) diverge positivamente (c) converge (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} (\cos\sqrt{x})\left(\sin\frac{1}{x^3}\right) dx.$$

Poniamo $f(x) = (\cos\sqrt{x})\left(\sin\frac{1}{x^3}\right)$ e osserviamo che f non è definita per $x=0$. Dividiamo l'intervallo di integrazione e consideriamo

$\int_0^1 f(x)dx$. La f è di segno variabile e risulta

$|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in (0,1]$, quindi, per il criterio del confronto e dell'assoluta integrabilità, $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Per $x \geq 1$ avremo che

$$|f(x)| \leq \left|\sin\frac{1}{x^3}\right| = \sin\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^6}\right) = \frac{1}{x^3}\left(1+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right).$$

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^3}$ e ricordando che $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x^3}dx$ converge.

Dal criterio del confronto avremo che

$\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, quindi, dal criterio di assoluta integrabilità,

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

7. La successione $a_n = \log(1+n)\left(\cos\frac{1}{n}\right)^2 + \log n\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 + \log\frac{1}{n}$, definita per $n \geq 1$,

► (a) ha massimo ma non ha minimo

(b) ha sia massimo che minimo

(c) non ha né massimo né minimo

(d) ha minimo ma non ha massimo

Soluzione:

$$a_n = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n \sin^2\frac{1}{n} + \log\frac{1}{n} = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n \sin^2\frac{1}{n} - \log n =$$

$$= \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n\left(\sin^2\frac{1}{n} - 1\right) = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} - \log n \cos^2\frac{1}{n} =$$

$$= \cos^2\frac{1}{n}\left(\log(1+n) - \log n\right) = \cos^2\frac{1}{n}\log\frac{1+n}{n} = \cos^2\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Osserviamo ora che $\lim_{n\to\infty} a_n = \cos^2 0 \log(1) = 0$

e che $a_n > 0 \;\forall n \geq 1$, quindi $\inf(a_n) = 0$ ma (a_n) non ha minimo. Inoltre, dalla versione del teorema di Weierstrass generalizzato per le successioni, otteniamo che (a_n) ha massimo.

8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n)!} =$

► (a) $+\infty$ (b) 0 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $e^{\frac{9}{4}}$

Soluzione:

$$a_n = \frac{(3n)!}{n!\,(2n)!}$$

Utilizziamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1))!}{(n+1)!\,(2(n+1))!} \cdot \frac{n!\,(2n)!}{(3n)!} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\,\frac{(2n)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \longrightarrow \frac{9}{4} > 1$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 (\sin n)^{(n^2)}$

(a) converge ma non converge assolutamente (b) diverge negativamente

(c) diverge positivamente ► (d) converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 (\sin n)^{n^2}$ e osserviamo che la successione non è di segno costante.

$$|a_n| = \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 |\sin n|^{n^2} \leq \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= n^{3/2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^{1/2}\left(1-\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^2 = n^{3/2}(1+o(1))^{1/2}\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2 =$$

$$= n^{3/2}(1+o(1))\frac{1}{4n^4}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \frac{n^{3/2}}{4n^4}(1+o(1)) = \frac{1}{4n^{5/2}}(1+o(1)).$$

Scegliendo $b_n = \frac{1}{n^{5/2}}$ otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2}{b_n} = \frac{1}{4}.$$

Poiché $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_{n\geq 1}\sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2$ converge e, per il criterio del confronto, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge assolutamente.

10. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$

(a) è indeterminata ► (b) converge (c) diverge negativamente (d) diverge positivamente

Soluzione:

Sia $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n} = \frac{\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2}-n}{n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}-n}{n} =$

$$= \frac{n\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n}{n} = \frac{\cancel{n}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\cancel{-n}}{n} = \frac{\frac{1}{2n}(1+o(1))}{n} = \frac{1}{2n^2}(1+o(1)).$$

Ponendo $b_n = \frac{1}{n^2}$ otteniamo che $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$, quindi, per il criterio del confronto asintotico, $\sum a_n$ converge poiché anche $\sum b_n$ converge.

11. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

(a) non è continua e non ha nessuna delle derivate parziali

(b) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

► (c) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(d) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

Soluzione:

Verifichiamo prima la continuità utilizzando le coordinate polari.

Poniamo

$$g(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \frac{(\rho^2\cos^2\vartheta - \rho^2\sin^2\vartheta)^{4/3}}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} = \frac{\rho^{8/3}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)}{\rho^2} =$$

$$= \rho^{2/3}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

Dato che $|g(\rho,\vartheta)| \leq \rho^{2/3} \to 0$ per $\rho \to 0$, f è continua in $(0,0)$.

Vediamo ora le derivate parziali.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(h^2-0)^{4/3}}{h^2+0} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{8/3}}{h^2 \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } h\to 0^+ \\ -\infty & \text{se } h \to 0^- \end{cases}$$

quindi la derivata parziale rispetto a x non esiste.

Dato che $f(y,x) = f(x,y)$, non esiste neanche $f_y(0,0)$.

12. Sia $f(x,y) = e^{x+y} + x^2 - 2y$. In quale dei seguenti insiemi esiste almeno un punto dove si annulla il gradiente di f?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \leq 0\}$

► (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 25\}$

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{x+y} + x^2 - 2y.$$

$$f_x = e^{x+y} + 2x \quad , \quad f_y = e^{x+y} - 2$$

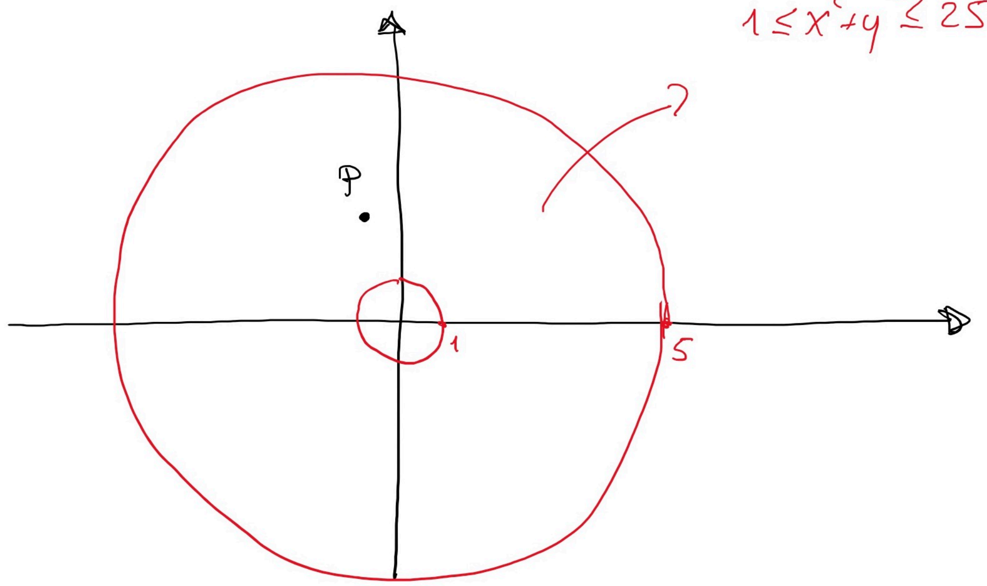
$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} e^{x+y} + 2x = 0 \\ e^{x+y} - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad e^{x+y} = 2 \qquad x+y = \log 2$$

Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$e^{\log 2} + 2x = 0 \qquad 2 + 2x = 0 \qquad x = -1 \Rightarrow y = \log 2 - x = \log 2 + 1$$

$$\nabla f = 0 \iff (x,y) = (-1, 1 + \log 2) =: P$$

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 25$



Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 696348 14 luglio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	c
3	d
4	a
5	c
6	d
7	c
8	b
9	b
10	d
11	b
12	c

1. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = -5|x|(2 - \cos x)$ nel punto di ascissa $x = -\pi$ è

► (a) $y = 15x$ (b) $y = (15 - 5\pi)x - 5\pi^2$ (c) $y = 15x - 15\pi$ (d) $y = 15x + 15\pi$

Soluzione:

$f(x) = -5|x|(2-\cos x)$, $x_0 = -\pi$.

Dato che $x_0 < 0$, la funzione, in un intorno di x_0, si scrive

$$f(x) = 5x(2-\cos x).$$

$$f'(x) = 5(2-\cos x + x\sin x)$$

$$f(-\pi) = -5\pi(2-(-1)) = -15\pi$$

$$f'(-\pi) = 5(2-(-1) - \pi \cdot 0) = 15$$

L'equazione della retta tangente è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = -15\pi + 15(x-(-\pi)) = -15\pi + 15x + 15\pi = 15x.$$

2. La funzione $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(a) non ha né massimo né minimo

(b) ha sia massimo che minimo

► (c) ha minimo ma non ha massimo

(d) ha massimo ma non ha minimo

Soluzione:

$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \cdot \text{limitata} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = (+\infty)^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{+\infty}\right) = (+\infty)\cdot \cos 0 = (+\infty)\cdot 1 = +\infty.$$

Dal secondo limite otteniamo che f non ha massimo.

Osserviamo ora che $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi) = -\frac{1}{\pi^2} < 0$, quindi, per il teorema di Weierstrass generalizzato, f ha minimo.

3. Se $F(x) = \displaystyle\int_1^{x\cos(2x)} \frac{(\sin t)^2 \cos t}{2+(\sin t)^3}\,dt$ allora $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

(a) $+\infty$

(b) $-\dfrac{(\sin 1)^2\cos 1}{2+(\sin 1)^3}$

(c) $\log 3$

► (d) 0

Soluzione:

$$F(x) = \int_{1}^{x\cos(2x)} \frac{(\sin t)^2 \cos t}{2+(\sin t)^3}\, dt \, .$$

$$F'(x) = \frac{(\sin(x\cos(2x)))^2 \cos(x\cos(2x))}{2+(\sin(x\cos(2x)))^3} \cdot (\cos(2x) - 2x\sin(2x))$$

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(\pi)\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi\right)}{2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi\right)\right)^3} \left(\cos(\pi) - 2\frac{\pi}{2}\sin\pi\right) =$$

$$= \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2+\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^3} (-1-0) = \frac{1\cdot 0}{2-1}(-1-0) = 0 \, .$$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^2 \tan x \, dx =$

► (a) $\dfrac{\log 2}{2} - \dfrac{1}{4}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\log 2}{4}$ (d) $\dfrac{\pi}{2}$

Soluzione:

$$\int (\sin x)^2 \, tg\, x \, dx = \int (\sin x)^2 \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} \sin x \, dx .$$

Eseguiamo la sostituzione $\cos x = t$, $\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$, $\sin x \, dx = -dt$

Quindi $\displaystyle\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} \sin x \, dx = \int \frac{1-t^2}{t}(-dt) = \int t - \frac{1}{t} \, dt = \frac{t^2}{2} - \log|t| + c =$

$= \dfrac{\cos^2 x}{2} - \log|\cos x| + c .$

$$\int_0^{\pi/4} (\sin x)^2 \, tg\, x \, dx = \left[\frac{\cos^2 x}{2} - \log|\cos x| \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \log \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \cancel{\log 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \log \sqrt{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log 2 .$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^2 - 1} \, dx$

(a) diverge positivamente (b) non esiste ► (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

$\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$. Poniamo $f(x)=\frac{\log x}{1-x^2}$ e osserviamo che f non è definita per $x=0$ e $x=1$. Dividiamo l'intervallo di integrazione considerando prima $\int_0^{1/2} f(x)dx$. Osserviamo che $f(x)>0$ $\forall x\in(0,1)$.

Vediamo l'andamento di f per $x\to 0$. Scegliamo $g(x)=\frac{1}{x^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1-x^2}\cdot x^{1/2}=1\cdot\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}\log x=0.$$

Dato che $\int_0^{1/2} g(x)dx$ converge, per il criterio del confronto, anche $\int_0^{1/2} f(x)dx$ converge.

Per $x\to 1$

$$f(x)=\frac{\log(1+x-1)}{x^2-1}=\frac{(x-1)+o(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1+o(x-1)}{x+1}\to\frac{1}{2}$$

quindi f è limitata in un intorno di $x=1$, di conseguenza $\int_{1/2}^{1} f(x)dx$ converge.

6. Quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\sin x\,dx=-\infty$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\sin x\,dx=+\infty$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=0$ ► (d) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{n\pi}\sin x\,dx=(-1)^{n+1},\ \forall\, n\in\mathbb{Z}$

Soluzione:

$$\int_{\pi/2}^{n\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{\pi/2}^{n\pi}=-\cos(n\pi)+\cos\frac{\pi}{2}=-(-1)^n+0=(-1)^{n+1}$$

7. La successione $a_n=\log(1+n)\left(\cos\frac{1}{n}\right)^2+\log n\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2+\log\frac{1}{n}$, definita per $n\geq 1$,

(a) non ha né massimo né minimo (b) ha minimo ma non ha massimo

► (c) ha massimo ma non ha minimo (d) ha sia massimo che minimo

Soluzione:

$$a_n = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n \sin^2\frac{1}{n} + \log\frac{1}{n} = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n \sin^2\frac{1}{n} - \log n =$$

$$= \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n\left(\sin^2\frac{1}{n} - 1\right) = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} - \log n \cos^2\frac{1}{n} =$$

$$= \cos^2\frac{1}{n}\left(\log(1+n) - \log n\right) = \cos^2\frac{1}{n}\log\frac{1+n}{n} = \cos^2\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Osserviamo ora che $\lim_{n\to\infty} a_n = \cos^2 0 \log(1) = 0$

e che $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$, quindi $\inf(a_n) = 0$ ma (a_n) non ha minimo. Inoltre, dalla versione del teorema di Weierstrass generalizzato per le successioni, otteniamo che (a_n) ha massimo.

8. La successione $a_n = \dfrac{n^3 + 8(-1)^n}{3^n}$

(a) è debolmente decrescente

► (b) ha sia massimo che minimo

(c) non è limitata superiormente

(d) non ha limite

Soluzione:

$$a_n = \frac{n^3 + 8(-1)^n}{3^n}$$

limitata

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \boxed{\frac{n^3}{3^n}} + \frac{8(-1)^n}{3^n} = 0 + 0 = 0$$

potenza
esponenziale

$$a_0 = \frac{0 + 8\cdot 1}{3^0} = \frac{8}{1} > 0 \quad \text{quindi } (a_n) \text{ ha massimo}$$

$$a_1 = \frac{1 + 8(-1)}{3^1} = \frac{-7}{3} < 0 \quad \text{quindi } (a_n) \text{ ha minimo.}$$

9. La serie $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n^3 + 2n^2 + 1}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^2 (\sin n)^{(n^2)}$

(a) diverge positivamente

► (b) converge assolutamente

(c) diverge negativamente

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 (\sin n)^{n^2}$ e osserviamo che la successione non è di segno costante.

$$|a_n| = \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 |\sin n|^{n^2} \leq \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= n^{3/2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^{1/2}\left(1-\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^2 = n^{3/2}\left(1+o(1)\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2 =$$

$$= n^{3/2}\left(1+o(1)\right)\frac{1}{4n^4}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \frac{n^{3/2}}{4n^4}\left(1+o(1)\right) = \frac{1}{4n^{5/2}}\left(1+o(1)\right).$$

Scegliendo $b_n = \frac{1}{n^{5/2}}$ otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2}{b_n} = \frac{1}{4}.$$

Poiché $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_{n\geq 1}\sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2$ converge e, per il criterio del confronto, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge assolutamente.

10. La serie $\displaystyle\sum_n \frac{4^{(4n)}}{3\sqrt{n}+1}$

(a) diverge negativamente

(b) converge assolutamente

(c) converge ma non converge assolutamente

► (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n} \frac{4^{4n}}{3\sqrt{n}+1}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{4n}}{3\sqrt{n}+1} = +\infty$$

quindi la serie non converge.

Dato che la serie è a termini positivi otteniamo che diverge positivamente.

11. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

(a) non è continua e non ha nessuna delle derivate parziali

► (b) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(c) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(d) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

Soluzione:

Verifichiamo prima la continuità utilizzando le coordinate polari.

Poniamo

$$g(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \frac{(\rho^2\cos^2\vartheta - \rho^2\sin^2\vartheta)^{4/3}}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} = \frac{\rho^{8/3}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)}{\rho^2} =$$

$$= \rho^{2/3}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

Dato che $|g(\rho,\vartheta)| \leq \rho^{2/3} \to 0$ per $\rho \to 0$, f è continua in $(0,0)$.

Vediamo ora le derivate parziali.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(h^2-0)^{4/3}}{h^2+0} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{8/3}}{h^2 \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } h\to 0^+ \\ -\infty & \text{se } h\to 0^- \end{cases}$$

quindi la derivata parziale rispetto a x non esiste.

Dato che $f(y,x) = f(x,y)$, non esiste neanche $f_y(0,0)$.

12. L'insieme dove i gradienti delle due funzioni $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2$ sono paralleli

(a) è costituito da un solo punto

(b) è costituito da due punti

► (c) è costituito da infiniti punti allineati

(d) è vuoto

Soluzione:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$g(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 2(x-1), \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-3)$$

∇f è parallelo a $\nabla g \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f = \lambda \nabla g$.

$$\begin{cases} \cancel{2}x = \lambda\, \cancel{2}(x-1) \\ \cancel{2}y = \lambda\, \cancel{2}(y-3) \end{cases}$$

osserviamo che $x=1$ non è soluzione come $y=3$ non è soluzione.

quindi

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x}{x-1} \\ y = \dfrac{x}{x-1}(y-3) \end{cases} \Rightarrow (x-1)y = x(y-3) \iff \cancel{xy} - y = \cancel{xy} - 3x$$

$$\iff \boxed{y = 3x}$$ che descrive una retta.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 79633 14 luglio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	b
3	d
4	a
5	a
6	c
7	d
8	c
9	c
10	a
11	d
12	a

1. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = -5|x|(2 - \cos x)$ nel punto di ascissa $x = -\pi$ è

(a) $y = 15x - 15\pi$ ► (b) $y = 15x$ (c) $y = 15x + 15\pi$ (d) $y = (15 - 5\pi)x - 5\pi^2$

Soluzione:

$f(x) = -5|x|(2-\cos x) \quad , \quad x_0 = -\pi.$

Dato che $x_0 < 0$, la funzione, in un intorno di x_0, si scrive

$$f(x) = 5x(2-\cos x).$$

$$f'(x) = 5(2-\cos x + x\sin x)$$

$$f(-\pi) = -5\pi(2-(-1)) = -15\pi$$

$$f'(-\pi) = 5(2-(-1) - \pi \cdot 0) = 15$$

L'equazione della retta tangente è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = -15\pi + 15(x-(-\pi)) = -15\pi + 15x + 15\pi = 15x.$$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3+3x^2+x+1 & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{2x^2-(\sin x)^2}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$

(a) è derivabile in $x=0$

► (b) è derivabile a destra ma non a sinistra in $x=0$

(c) è derivabile a sinistra ma non a destra in $x=0$

(d) non è derivabile né a destra né a sinistra in $x=0$

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3+3x^2+x+1 & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{2x^2-(\sin x)^2}{x} & \text{se } x>0. \end{cases}$$

Verifichiamo la derivabilità a destra:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{2x^2-(\sin x)^2}{x} - 0\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2-(x+o(x^2))^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 - x^2(1+o(x))^2}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad f'_+(0) = 1.$$

Per la derivabilità a sinistra osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \neq f(0)$$

quindi f non è continua a sinistra in $x=0$, pertanto non è neanche derivabile a sinistra.

3. Se $F(x) = \displaystyle\int_1^{x\cos(2x)} \frac{(\sin t)^2 \cos t}{2 + (\sin t)^3}\, dt$ allora $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

(a) $\log 3$ (b) $+\infty$ (c) $-\dfrac{(\sin 1)^2 \cos 1}{2 + (\sin 1)^3}$ ► (d) 0

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^{x\cos(2x)} \frac{(\sin t)^2 \cos t}{2+(\sin t)^3}\, dt .$$

$$F'(x) = \frac{(\sin(x\cos(2x)))^2 \cos(x\cos(2x))}{2+(\sin(x\cos(2x)))^3} \cdot (\cos(2x) - 2x\sin(2x))$$

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(\pi)\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi\right)}{2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi\right)\right)^3} \left(\cos(\pi) - 2\frac{\pi}{2}\sin\pi\right) =$$

$$= \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2+\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^3} (-1-0) = \frac{1 \cdot 0}{2-1} (-1-0) = 0 .$$

4. $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2}(4x^3+x)\,dx =$

► (a) $\dfrac{13e^4+3}{2}$ (b) $\dfrac{5e^2+3}{2}$ (c) $4e^2$ (d) $185e^4-1$

Soluzione:

$$\int e^{x^2}(4x^3+x)dx = \int e^{x^2}(4x^2+1)\,x\,dx$$

eseguiamo la sostituzione $x^2=t$, $\frac{dt}{dx}=2x$, $x\,dx=\frac{dt}{2}$

$$\int e^{x^2}(4x^2+1)\,x\,dx = \int e^t(4t+1)\frac{dt}{2} .$$

Ora integriamo per parti integrando e^t e derivando $4t+1$

$$\frac{1}{2}\int e^t(4t+1)dt = \frac{1}{2}\left(e^t(4t+1)-\int e^t\cdot 4\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(e^t(4t+1)-4e^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^t(4t-3)+c = \frac{1}{2}e^{x^2}(4x^2-3).$$

$$\int_0^2 e^{x^2}(4x^3+x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}(4x^2-3)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^4(4\cdot 4-3)-e^0(0-3)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(13e^4+3) .$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$

► (a) converge (b) diverge positivamente (c) non esiste (d) diverge negativamente

Soluzione:

$\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$. Poniamo $f(x)=\frac{\log x}{1-x^2}$ e osserviamo che f non è definita per $x=0$ e $x=1$. Dividiamo l'intervallo di integrazione considerando prima $\int_0^{1/2} f(x)dx$. Osserviamo che $f(x)>0$ $\forall x\in(0,1)$.

Vediamo l'andamento di f per $x\to 0$. Scegliamo $g(x)=\frac{1}{x^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1-x^2}\cdot x^{1/2} = 1\cdot\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}\log x = 0.$$

Dato che $\int_0^{1/2} g(x)dx$ converge, per il criterio del confronto, anche $\int_0^{1/2} f(x)dx$ converge.

Per $x\to 1$ $\quad f(x)=\frac{\log(1+x-1)}{x^2-1}=\frac{(x-1)+o(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1+o(x-1)}{x+1}\to\frac{1}{2}$

quindi f è limitata in un intorno di $x=1$, di conseguenza $\int_{1/2}^1 f(x)dx$ converge.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{x})}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$

(a) diverge positivamente (b) non esiste ► (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $f(x)=\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x^{5/4}}$. Dividiamo l'intervallo di integrazione e consideriamo $\int_0^1 f(x)dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Per $x\in(0,1]$, $f(x)>0$ e, per $x\to 0^+$ risulta

$$f(x)=\frac{x^{1/2}+o(x)}{x^{5/4}}=\frac{x^{1/2}\left(1+o(x^{1/2})\right)}{x^{5/4}}=\frac{1+o(x^{1/2})}{x^{3/4}}$$

Scegliamo quindi $g(x)=\frac{1}{x^{3/4}}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico. Dato che $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ e che $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, abbiamo che anche $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Per $x\in[1,+\infty)$ $f(x)$ ha segno variabile. Osserviamo che $|f(x)|=\dfrac{|\sin(\sqrt{x})|}{x^{5/4}}\leq\dfrac{1}{x^{5/4}}$. Dato che $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/4}}$ converge, per il criterio del confronto, $\int_1^{+\infty}|f(x)|\,dx$ converge e, per il criterio di assoluta convergenza $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Quindi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. La successione $a_n=\log(1+n)\left(\cos\frac{1}{n}\right)^2+\log n\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2+\log\frac{1}{n}$, definita per $n\geq 1$,

(a) non ha né massimo né minimo
(b) ha minimo ma non ha massimo
(c) ha sia massimo che minimo
► (d) ha massimo ma non ha minimo

Soluzione:

$$a_n = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n \sin^2\frac{1}{n} + \log\frac{1}{n} = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n \sin^2\frac{1}{n} - \log n =$$

$$= \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n\left(\sin^2\frac{1}{n} - 1\right) = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} - \log n \cos^2\frac{1}{n} =$$

$$= \cos^2\frac{1}{n}\left(\log(1+n) - \log n\right) = \cos^2\frac{1}{n}\log\frac{1+n}{n} = \cos^2\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Osserviamo ora che $\lim_{n\to\infty} a_n = \cos^2 0 \log(1) = 0$

e che $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$, quindi $\inf(a_n) = 0$ ma (a_n) non ha minimo. Inoltre, dalla versione del teorema di Weierstrass generalizzato per le successioni, otteniamo che (a_n) ha massimo.

8. $\lim_{n\to\infty} e^{n+1} \log \dfrac{e^n+3}{e^n+1} =$

(a) $+\infty$ (b) 1 ► (c) $2e$ (d) 0

Soluzione:

$$a_n = e^{n+1}\log\frac{e^n+3}{e^n+1} = e^{n+1}\log\left(\frac{e^n+1+2}{e^n+1}\right) = e^{n+1}\log\left(1+\frac{2}{e^n+1}\right) =$$

$$= e^{n+1}\left(\frac{2}{e^n+1} + o\left(\frac{2}{e^n+1}\right)\right) = \frac{2e^{n+1}}{e^n+1}\left(1+o(1)\right) \to 2e \qquad \text{per } n\to+\infty$$

9. La serie $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 (\sin n)^{(n^2)}$

(a) converge ma non converge assolutamente (b) diverge negativamente

► (c) converge assolutamente (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 (\sin n)^{n^2}$ e osserviamo che la successione non è di segno costante.

$$|a_n| = \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 |\sin n|^{n^2} \leq \sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= n^{3/2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^{1/2}\left(1-\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^2 = n^{3/2}\left(1+o(1)\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2 =$$

$$= n^{3/2}\left(1+o(1)\right)\frac{1}{4n^4}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \frac{n^{3/2}}{4n^4}\left(1+o(1)\right) = \frac{1}{4n^{5/2}}\left(1+o(1)\right).$$

Scegliendo $b_n = \frac{1}{n^{5/2}}$ otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2}{b_n} = \frac{1}{4}.$$

Poiché $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_{n\geq 1}\sqrt{n^3+2n^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2$ converge e, per il criterio del confronto, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge assolutamente.

10. La somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ è

► (a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $+\infty$

Soluzione:

Ricordiamo che la somma di una serie geometrica di ragione x $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ vale $\frac{1}{1-x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ t.c. $|x|<1$.

Nel nostro caso $x=\frac{2}{5}$ quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}.$$

11. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

(a) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

(b) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(c) non è continua e non ha nessuna delle derivate parziali

► (d) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

Soluzione:

Verifichiamo prima la continuità utilizzando le coordinate polari.

Poniamo

$$g(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \frac{(\rho^2\cos^2\vartheta - \rho^2\sin^2\vartheta)^{4/3}}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} = \frac{\rho^{8/3}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)}{\rho^2} =$$

$$= \rho^{2/3}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

Dato che $|g(\rho,\vartheta)| \leq \rho^{2/3} \to 0$ per $\rho \to 0$, f è continua in $(0,0)$.

Vediamo ora le derivate parziali.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(h^2-0)^{4/3}}{h^2+0} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{8/3}}{h^2 \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } h\to 0^+ \\ -\infty & \text{se } h \to 0^- \end{cases}$$

quindi la derivata parziale rispetto a x non esiste.

Dato che $f(y,x) = f(x,y)$, non esiste neanche $f_y(0,0)$.

12. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$ sono

► (a) tre (b) nessuno (c) uno (d) due

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$$

$$f_x = -e^{-x}(y^3 - 2xy) + e^{-x}(-2y) = e^{-x}(-y^3 + 2xy - 2y) =$$

$$= e^{-x} \cdot y(-y^2 + 2x - 2)$$

$$f_y = e^{-x}(3y^2 - 2x)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} e^{-x} y(-y^2 + 2x - 2) = 0 \\ e^{-x}(3y^2 - 2x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(-y^2 + 2x - 2) = 0 \\ 3y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Dalla 2^a equazione otteniamo $3y^2 = 2x$. Sostituendo nella 1^a otteniamo

$$y(-y^2 + 3y^2 - 2) = 0 \iff y(2y^2 - 2) = 0 \iff y = 0 \vee y^2 = 1$$

Se $y = 0$, da $3y^2 = 2x$ otteniamo $x = 0$, quindi il punto $\boxed{(0,0)}$

Se $y = 1$, $3y^2 = 2x \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, quindi $\boxed{\left(\frac{3}{2}, 1\right)}$

Se $y = -1$, $3y^2 = 2x \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, quindi $\boxed{\left(\frac{3}{2}, -1\right)}$.

La funzione ha quindi 3 punti stazionari.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	vecchio regolamento 14 luglio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	a
3	a
4	b
5	c
6	a
7	c
8	a
9	a
10	b
11	d
12	d

1. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = -5|x|(2 - \cos x)$ nel punto di ascissa $x = -\pi$ è

(a) $y = 15x - 15\pi$ (b) $y = 15x + 15\pi$ ► (c) $y = 15x$ (d) $y = (15 - 5\pi)x - 5\pi^2$

Soluzione:

$f(x) = -5|x|(2-\cos x)$, $x_0 = -\pi$.

Dato che $x_0 < 0$, la funzione, in un intorno di x_0, si scrive

$$f(x) = 5x(2-\cos x).$$

$$f'(x) = 5(2-\cos x + x\sin x)$$

$$f(-\pi) = -5\pi(2-(-1)) = -15\pi$$

$$f'(-\pi) = 5(2-(-1) - \pi \cdot 0) = 15$$

L'equazione della retta tangente è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = -15\pi + 15(x-(-\pi)) = -15\pi + 15x + 15\pi = 15x.$$

2. La derivata della funzione $f(x) = \log\left(\sin(x^3)\right)$ è

► (a) $\dfrac{3x^2}{\tan(x^3)}$ (b) $\dfrac{\sin(x^3)}{x} + \dfrac{3x^2 \log x}{\cos(x^3)}$ (c) $\dfrac{3\sin^2 x}{x}$ (d) $\dfrac{1}{\sin(x^3)}$

Soluzione:

$$f(x) = \log(\sin(x^3))$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(x^3)} \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\operatorname{tg}(x^3)}$$

3. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2(1+x^2)}\right)$

► (a) ha un asintoto orizzontale e uno verticale (b) ha minimo assoluto

(c) ha un asintoto obliquo (d) non è limitata inferiormente

Soluzione:

$$f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2(1+x^2)}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2(1+\infty)}\right) = \operatorname{tg} 0 = 0$$

quindi f ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2(1+0^+)}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = +\infty$$

quindi f ha l'asintoto verticale di equazione $x = \frac{\pi}{2}$.

4. Se $F(x) = \displaystyle\int_1^{x\cos(2x)} \frac{(\sin t)^2 \cos t}{2 + (\sin t)^3}\, dt$ allora $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

(a) $+\infty$ ► (b) 0 (c) $\log 3$ (d) $-\dfrac{(\sin 1)^2 \cos 1}{2 + (\sin 1)^3}$

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^{x\cos(2x)} \frac{(\sin t)^2 \cos t}{2 + (\sin t)^3}\, dt .$$

$$F'(x) = \frac{(\sin(x\cos(2x)))^2 \cos(x\cos(2x))}{2 + (\sin(x\cos(2x)))^3} \cdot (\cos(2x) - 2x\sin(2x))$$

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(\pi)\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi\right)}{2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi\right)\right)^3} \left(\cos(\pi) - 2\frac{\pi}{2}\sin\pi\right) =$$

$$= \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2 + \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^3} (-1 - 0) = \frac{1 \cdot 0}{2 - 1} (-1 - 0) = 0 .$$

5. La funzione $F(x) = \int_0^x (\sin t)^2 (\cos t)^3 \, dt$

(a) ha un punto di minimo locale per $x = 0$

(b) è debolmente decrescente in $\mathbb{R}$

► (c) è debolmente crescente in un intorno di $x = 0$

(d) è strettamente positiva in un intorno di $x = 0$

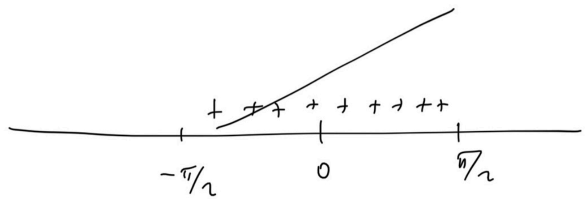
Soluzione:

$$F(x) = \int_0^x \sin^2 t \cos^3 t \, dt$$

$F'(x) = \sin^2 x \cos^3 x$

Vediamo il segno di $F'(x)$:

$\sin^2 x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos^3 x \geq 0 \iff \cos x \geq 0 \iff x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.



$F'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ quindi F è debolmente crescente in un intorno di $x = 0$.

6. Sia $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_3^{x^2} e^{t^2} + 1 \, dt$. Risulta che

► (a) $\min(F) < 0$

(b) $\inf(F) = -\infty$

(c) F è inferiormente limitata ma non ha minimo

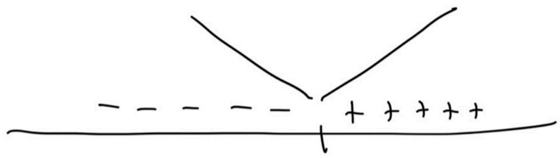
(d) $\min(F) > 0$

Soluzione:

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \int_3^{x^2} e^{t^2} + 1 \, dt$

$F'(x) = \left(e^{(x^2)^2} + 1\right) 2x$

$F'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$



quindi $x = 0$ è punto di minimo assoluto per F.

$$\min(F) = F(0) = \int_3^0 e^{t^2} + 1 \, dt = -\int_0^3 e^{t^2} + 1 \, dt < 0$$

poiché $e^{t^2} + 1 > 0 \quad \forall t \in [0,3]$.

7. La successione $a_n = \log(1+n)\left(\cos\frac{1}{n}\right)^2 + \log n \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 + \log\frac{1}{n}$, definita per $n \geq 1$,

(a) ha minimo ma non ha massimo
(b) ha sia massimo che minimo
► (c) ha massimo ma non ha minimo
(d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$$a_n = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n \sin^2\frac{1}{n} + \log\frac{1}{n} = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n \sin^2\frac{1}{n} - \log n =$$

$$= \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} + \log n\left(\sin^2\frac{1}{n} - 1\right) = \log(1+n)\cos^2\frac{1}{n} - \log n \cos^2\frac{1}{n} =$$

$$= \cos^2\frac{1}{n}\left(\log(1+n) - \log n\right) = \cos^2\frac{1}{n}\log\frac{1+n}{n} = \cos^2\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Osserviamo ora che $\lim_{n\to\infty} a_n = \cos^2 0 \log(1) = 0$

e che $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$, quindi $\inf(a_n) = 0$ ma (a_n) non ha minimo. Inoltre, dalla versione del teorema di Weierstrass generalizzato per le successioni, otteniamo che (a_n) ha massimo.

8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+n^2} - \sqrt[3]{n^4+n^3}}{\sqrt[3]{n}} =$

► (a) $-\frac{1}{3}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) 0
(d) $-\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+n^2} - \sqrt[3]{n^4+n^3}}{\sqrt[3]{n}} = \frac{\left[n^4\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]^{1/3} - \left[n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{1/3}}{n^{1/3}} =$$

$$= \left[n^{4/3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/3} - n^{4/3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}\right] n^{-1/3} =$$

$$= n^{4/3}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] n^{-1/3} =$$

$$= n\left[\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\frac{1}{3}+o(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{3}$$

avendo usato lo sviluppo di Taylor del binomiale

$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t)$ per $t\to 0$ con $\alpha = \frac{1}{3}$.

9. $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n n!}{(2n)^n} =$

► (a) 0 (b) $\frac{3}{2}$ (c) $+\infty$ (d) $\frac{3}{2e}$

Soluzione:

$$a_n = \frac{3^n n!}{(2n)^n} = \frac{3^n n!}{2^n n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{2^n n^n}{3^n n!} = \frac{3}{2}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3}{2}(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{2}e^{n\log\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \frac{3}{2}e^{n\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{3}{2}e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)} = \frac{3}{2}e^{-\frac{n}{n+1}(1+o(1))} \longrightarrow \frac{3}{2}e^{-1} = \frac{3}{2e} < 1$$

quindi, per il criterio del rapporto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

10. Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy\sin x - e^{-x\cos x}\cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$ allora $y\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

(a) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ► (b) $1+e$ (c) $\pi \sin 2$ (d) $\pi - 1$

Soluzione:

L'equazione differenziale è lineare non omogenea del tipo

$y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = x\sin x$, $b(x) = -e^{-x\cos x}\cos x$.

La soluzione generale sarà quindi $y(x) = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)} b(x)dx + c\right)$

dove $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x)$.

$$A(x) = \int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int 1\cdot(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x$$

$$\int e^{-A(x)} b(x)dx = \int e^{x\cos x - \sin x}\cdot\left(-e^{-x\cos x}\cos x\right)dx = -\int e^{-\sin x}\cos x\,dx$$

$$= e^{-\sin x} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-x\cos x + \sin x}\left(e^{-\sin x} + c\right)$$

$$2 = y(0) = e^{-0\cdot\cos 0 + \sin 0}\left(e^{-\sin 0} + c\right) = e^0\left(e^0 + c\right) = 1 + c \Rightarrow c = 1$$

quindi $y(x) = e^{-x\cos x + \sin x}\left(e^{-\sin x} + 1\right)$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}}\left(e^{-\sin\frac{\pi}{2}} + 1\right) = e^{0+1}\left(e^{-1} + 1\right) = e\left(1 + \frac{1}{e}\right) = e + 1.$$

11. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -\dfrac{x^3}{y^3} \\ y(1) = 4. \end{cases}$ Allora $y(4) =$

(a) $\dfrac{17}{4}$ (b) -2 (c) $\sqrt[4]{17}$ ► (d) 1

Soluzione:

L'equazione è a variabili separabili.

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3} \quad , \quad \int y^3\, dy = \int -x^3\, dx + c$$

$\frac{y^4}{4} = -\frac{x^4}{4} + c$. Ricaviamo c dalla condizione iniziale $y(1)=4$

$$\frac{4^4}{4} = -\frac{1^4}{4} + c \iff 4^3 = -\frac{1}{4} + c \iff c = 64 + \frac{1}{4} = \frac{257}{4}$$

$$\frac{y^4}{4} = -\frac{x^4}{4} + \frac{257}{4} \iff y^4 = -x^4 + 257$$

Considerando che $y(1)=4>0$, scegliamo la radice positiva

$$y = \sqrt[4]{257 - x^4} \Rightarrow y(4) = \sqrt[4]{257 - 4^4} = \sqrt[4]{1} = 1$$

12. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(5) = 0 \\ y'(5) = -2. \end{cases}$ Allora $y(-3) =$

(a) $\frac{3e^{32} - 2}{6e^{32}}$ (b) e^{-26} (c) $\frac{e^4 - e^{-10}}{e^{14}}$ ► (d) $\frac{e^{32} - 1}{2e^{16}}$

Soluzione:

$y''-4y=0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2-4=0$

che ha soluzioni $\lambda=\pm 2$.

L'integrale fondamentale è quindi

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x} \Rightarrow y'(x)=-2c_1e^{-2x}+2c_2e^{2x}$$

Ricaviamo c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali.

$$y(5)=c_1e^{-10}+c_2e^{10}$$

$$y'(5)=-2c_1e^{-10}+2c_2e^{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1e^{-10}+c_2e^{10}=0 \\ -2c_1e^{-10}+2c_2e^{10}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=-c_2e^{20} \\ -2(-c_2e^{20})e^{-10}+2c_2e^{10}=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2c_2e^{10}+2c_2e^{10}=-2 \Rightarrow 4c_2e^{10}=-2 \Rightarrow c_2=-\frac{e^{-10}}{2}$$

$$\Rightarrow c_1=-c_2e^{20}=-\left(-\frac{e^{-10}}{2}\right)\cdot e^{20}=\frac{e^{10}}{2}$$

$$\Rightarrow y(x)=\frac{e^{10}}{2}e^{-2x}-\frac{e^{-10}}{2}e^{2x} \Rightarrow y(-3)=\frac{e^{10}}{2}e^{6}-\frac{e^{-10}}{2}e^{-6}=$$

$$=\frac{e^{16}}{2}-\frac{e^{-16}}{2}=\frac{e^{32}-1}{2e^{16}}$$